経済と経営　23－1(1992.6)

〈資　　料〉

ミクロ経済学講義（Ⅰ）*

宮　　三　康

目次　はじめに

は　じ　め　に

本稿はミクロ経済学の中心的理論である一般均衡論の概要を，この理論の

＊本稿は経済学部の学生を対象にしたミクロ経済学入門を意図して書いたものである。教科書という性格上，特に脚注として上げたものの他に引用した文献の一いちを記さなかったが，本稿末尾に上げた参考文献のすべてにおかげをこうむっている。ここに記して，感謝の意を表したい。もちろん，誤りがあるとすれば，すべて筆者の責任である。

古典的な完成をみた Hicks, J. R. (1939)『価値と資本』に準じて記述したものである。

一般均衡論は資本主義体制の経済システムといわれる市場経済を，抽象化したモデルを用いて分析したものである。この理論を要約すれば次のようになる。完全競争市場のもとで，経済を構成する個々の経済主体，すなわち家計と企業は，各自の基準にもとづいて最適化行動をとり，独自に財の需要量と供給量を決定する。このようにして求められた個別経済主体の財の需給量を集計すれば，経済全体における各財の需要量と供給量とになる。この財の需給量は，求めた経過をみれば明らかなように，先験的に等しくなる必然性はない。しかし，市場における価格メカニズムがこの財の需給量を調整する役割をはたし，かくして経済の秩序が保たれる，というものである。

このような経済システムは現実の市場経済と異なっているであろう。たとえば完全競争という仮定，これは経済主体が財の特性や市場価格についての完全情報を持っている，個々の経済主体の需給量は市場全体の需給量に比べて十分小さい，経済主体の市場への参入・退出が自由である，等々[1)]の市場の状況を規定した仮定であるが，これ等は一般均衡論では暗黙裡に使用されているだけで，明示的には経済主体が財の市場価格を所与として行動するという仮定と解している。現実の市場は，市場価格に影響を及ぼす独占や寡占の併存する不完全競争の市場であるのが普通であろう。したがって非現実的な完全競争を前提とした理論は，このことだけでも現実の経済を分析するものとしては不適切であるという批判が成り立つかもしれない。しかし，それにもかかわらず本稿でミクロ経済学の中心的理論として取り上げる意義は次の点にある。すなわち，一般均衡論は抽象的な市場経済であれ，一つの経済システム全体を論理整合性をもって完全に説明している。したがってこの理論は，他の市場を分析する諸理論の一つの座標軸として位置づけることができ

1) 伊藤・西村編 (1989), p. 2。

る。また市場経済において本質的な意義をもつ価格の決定メカニズムを解明している，ということである。

なお本稿では，経済主体が市場で需要する，また供給する財は，物的財，非物的なサーヴィス財を問わず，すべて正の市場価格となる経済財に限定している。

第一章　家計の理論

家計は初期保有の財を市場に供給し，それによって得た貨幣所得で財を市場で需要する経済主体である。財の市場価格は，多数の経済主体による財の需要と供給によって市場で決定される。しかし個々の家計の財の需給量は市場全体でみればきわめて微少なものと考え，したがって価格に対する影響は無視しうるものとする。すなわち，個々の家計は財の価格を所与として行動すると仮定する。いいかえれば，これは市場が完全競争の状態にあるという仮定である。本章の目的は，個別家計が所与の価格と所得のもとで，財の需要と供給をどのように決定するかを述べることである。ただし本章では，財の供給について明示的に取り扱っていない。

1．効用関数と選好関係

家計が市場において所与の価格のもとで財を需要するのは，それらを消費することによって効用が得られるからである。したがって財の需要量と効用の間にある対応関係が想定できる。これが効用関数である。便宜上無限小の財の需要が可能であるとすれば，これは連続関数となる。家計が財の需要によって得られる効用については，L. ワルラスは，物の重さや長さを測定する単位のように，その測定単位の存在を仮定して，効用を基数的に取り扱った[2]。すなわち効用関数から得られた効用の数値の大きさそのものに意義を

2）Walras, L.（1926）（久武訳，1951，p. 77）。

認め，これによって全部効用や限界効用の概念を定義し，財のある需要と他の需要から得られた効用の大小を説明した。しかし家計の主観的評価である効用に客観的な測定単位が存在するのか，そもそも効用とは一体何であるのか，という問題がある。この効用の問題に入ることなく，しかし理論的に同等の結果を導びきだしたのが，以下に述べる選択の理論である。最初にいくつかの用語の定義と仮定をしよう。

家計が需要する財の種類をn種類とし，それらを1，2，…，nで表わす。i種類の財の需要量をx_iとし，各iの需要量の組み合せをベクトル$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$で表わし，それを家計の需要計画[3]と呼ぶことにしよう。需要計画の中には家計にとって物理的に実行不可能なものもあるであろう。そこで家計が実行可能な需要計画のすべてからなる集合をXとしよう[4]。集合X上の任意の需要計画の間に，次のような関係$\succsim$を仮定し，順序づけができるとする。関係$\succsim$は，たとえば集合Xの任意の2点$\boldsymbol{x}^1$と$\boldsymbol{x}^2$について，$\boldsymbol{x}^1 \succsim \boldsymbol{x}^2$と記すと，$\boldsymbol{x}^1$は$\boldsymbol{x}^2$より選好される（$\boldsymbol{x}^1 > \boldsymbol{x}^2$）か，または無差別（$\boldsymbol{x}^1 \sim \boldsymbol{x}^2$）の状態を表わすとし，選好関係とよばれる。

仮定1：Xの任意の点$\boldsymbol{x}^1$，$\boldsymbol{x}^2$について，$\boldsymbol{x}^1 \succsim \boldsymbol{x}^2$かまたは$\boldsymbol{x}^2 \succsim \boldsymbol{x}^1$が成立する。（完全律）

仮定2：Xの任意の点$\boldsymbol{x}$について，$\boldsymbol{x} \succsim \boldsymbol{x}$である。（反射律）

仮定3：Xの任意の点$\boldsymbol{x}^1$，$\boldsymbol{x}^2$，$\boldsymbol{x}^3$について，$\boldsymbol{x}^1 \succsim \boldsymbol{x}^2$かつ$\boldsymbol{x}^2 \succsim \boldsymbol{x}^3$ならば$\boldsymbol{x}^1 \succsim \boldsymbol{x}^3$が成立する。（推移律）

仮定4：Xの任意の点$\boldsymbol{x}^1$，$\boldsymbol{x}^2$について，$\boldsymbol{x}^1 \geq \boldsymbol{x}^2$ならば$\boldsymbol{x}^1 \succsim \boldsymbol{x}^2$となる。（非

3）この用語に消費計画の語を当てるのが一般的だが，本稿では財の市場での購入計画という性格を強調するために，この用語を用いることにした。

4）この制約はXの下方有界性を保証するためにあり，一般均衡の厳密な存在証明にとって重要なものである。しかし，入門的テキストという性格上，本稿ではほとんど明示的に言及しないで利用しているにすぎない。Debreu, G. (1959)（丸山訳，昭和52年，p. 84 参照）。

飽和の仮定）[5)]

仮定5：Xの任意の点$\boldsymbol{x}^0$について，集合$\{\boldsymbol{x}\in X|\boldsymbol{x}\succsim\boldsymbol{x}^0\}$および$\{\boldsymbol{x}\in X|\boldsymbol{x}^0\succsim\boldsymbol{x}\}$は，$X$の閉集合である。（選好関係の連続性の仮定）

仮定6：Xの異なる任意の点$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2$について，$\boldsymbol{x}^1\sim\boldsymbol{x}^2$ならば$\alpha\boldsymbol{x}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^2>\boldsymbol{x}^1$，$\boldsymbol{x}^2$となる。ただし$\alpha$は，$0<\alpha<1$をみたす実数である。（選好関係の凸性の仮定）

以上の仮定のうち仮定1，2，3，4，は合理的に行動する家計にとって無理のないものであろう。仮定5，6は，経済理論の分析のための便宜的性格の強いものである。これらの仮定は，需要する財の無限小の分割可能性を前提にしており，現実とはかならずしも妥当しないからである。

さて以上の仮定がみたされれば，X上のすべての需要計画について，家計は選好の順序づけができることになる。また任意のある需要計画$\boldsymbol{x}^0$と無差別な需要計画の集り$\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^0\in X\}$，すなわち無差別マップを持つことができる。家計が需要する財が2種類1，2の場合の無差別マップを描いたのが図1で無差別曲線とよばれる。家計の需要計画は初期保有の財の供給も含むのが一般的だが，それらを負の需要として取り扱えば同様の方法で分析できるので，複雑化を避けるためにここでは財の需要量をすべて正だとしている。

図1．において需要計画$\boldsymbol{x}^0$と無差別な計画の集合を描いたのが無差別曲線I_1である。この曲線が，右下りになるのは仮定4から，連続になるのは仮定5から，原点に対して凸になるのは仮定6から容易に証明できる。また無差別曲線が，東北方向に進むほどその曲線上の需要計画が選好されることや，それらの曲線が交わることがないことも仮定3，仮定4から明らかである。

5）$\boldsymbol{x}^1\geq\boldsymbol{x}^2$は，$\boldsymbol{x}^1\geqq\boldsymbol{x}^2$かつ$\boldsymbol{x}^1\neq\boldsymbol{x}^2$を表わす。すなわち，ベクトルの成分である各$i$の数量について$x_i^1\geqq x_i^2$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，であり，かつ少なくとも一つの成分が$x_i^1>x_i^2$となることを表わす。

図1の需要計画では，たとえば$\boldsymbol{x}^0 \sim \boldsymbol{x}^1$であり，$\boldsymbol{x}^2 > \boldsymbol{x}^0$，$\boldsymbol{x}^1$である。

以上のような需要計画の選好の順序だけを示す無差別マップを用いれば，基数的効用という概念を用いることなく同様の理論的成果が得られる。

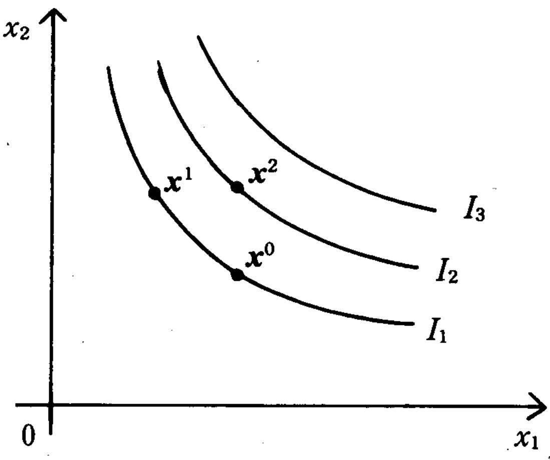

図1．

ところで，もし選好の背景に効用に類した概念を想定したとしても，この場合の効用の基数的な大小関係はもはや意味をもたず，ただ選好の順序だけを示すことになる。次のような関数を考えてみよう。

任意の需要計画$\boldsymbol{x}^1$，$\boldsymbol{x}^2$について，$\boldsymbol{x}^1 > \boldsymbol{x}^2$ならば$u(\boldsymbol{x}^1) > u(\boldsymbol{x}^2)$，$\boldsymbol{x}^1 \sim \boldsymbol{x}^2$ならば$u(\boldsymbol{x}^1) = u(\boldsymbol{x}^2)$。

このu関数は需要計画$\boldsymbol{x}^1$と$\boldsymbol{x}^2$の選好の順序を示すものであり，序数的効用関数とよばれる。仮定1～6がみたされれば，X上に連続で凹の単調増加関数が存在することが証明されている[6]。これからはこの選好関係の仮定より求められた序数的効用関数を用いて議論を進めることにしよう。

2．無差別曲線と限界代替率

家計が需要する財を2種類1，2とする。その場合任意の需要計画$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$に対して，前節で定義した序数的効用関数は，$u = u(x_1, x_2)$であり，図示すれば図2－1となる。

ある需要計画$\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$のとき効用は$u^0 = u(x_1^0, x_2^0)$となる。$u^0$の高さで$u = u(x_1, x_2)$の図形を切り，その切口を$x_1x_2$平面に射影したのが$I_0$である。図2－2はそれを$x_1x_2$平面に書きなおしたものである。$I_0$は効用$u^0$と等しくな

6）Debreu, G.（1959）（丸山訳，昭和52年，第4章参照）。

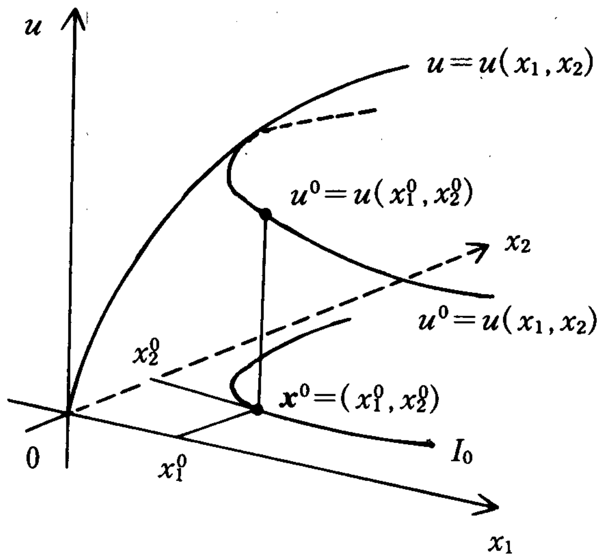

図２－１．

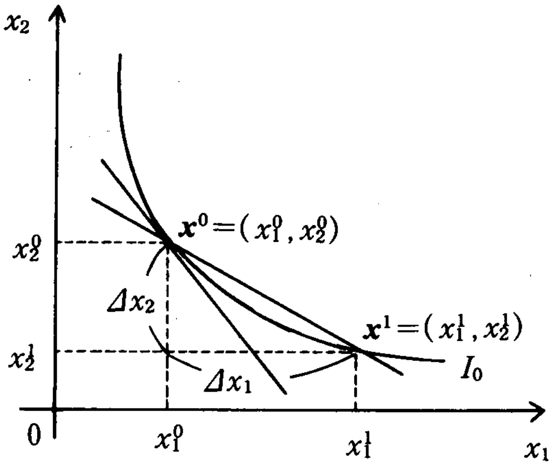

図２－２．

る需要計画の集合であり，選好の順序を示す指標としての効用を明示的に考慮して描いた無差別曲線である。このようにして得られる無差別曲線が，右下りで原点に対して凸であり，また東北方向に進むほど高い効用を示し交わることがないことは，前節の仮定より明らかである。

さてI_0曲線上に$\boldsymbol{x}^0$と異なる需要計画$\boldsymbol{x}^1=(x_1^1, x_2^1)$をとろう。$\boldsymbol{x}^0$と$\boldsymbol{x}^1$は等しい効用指標$u^0$をもつが，$\boldsymbol{x}^1$は$\boldsymbol{x}^0$より１財が$\Delta x_1$多く，２財が$\Delta x_2$少ない需要計画である。このことは２つの需要計画において１財のΔx_1と２財のΔx_2を代替しても効用が等しくなることを意味している。その代替率は$-\Delta x_2/\Delta x_1$となる。比率のみに関心があるのでマイナスを掛けて，その値をプラスにしている。代替率$-\Delta x_2/\Delta x_1$は，図２－２の$\boldsymbol{x}^0$と$\boldsymbol{x}^1$を結ぶ直線の傾きの絶対値とも等しいが，この間は不変である。無差別曲線I_0は原点に対して凸なので需要計画$\boldsymbol{x}^0$と$\boldsymbol{x}^1$の間のどの点をとっても代替率は$-\Delta x_2/\Delta x_1$と異なり，これをI_0曲線の任意の代替率とすることはできない。これは$\boldsymbol{x}^1$を$\boldsymbol{x}^0$に無限に近い需要計画とすることによって解消できる。数学的には，

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{dx_2}{dx_1} \equiv \text{MRS}\,(\boldsymbol{x}^0)$$

と表現すればよい。これを点$\boldsymbol{x}^0$での限界代替率(Marginal Rate of Substitution) MRS($\boldsymbol{x}^0$) と定義しよう。図2－2から明らかなように MRS($\boldsymbol{x}^0$) は $\boldsymbol{x}^0$ で接する直線の傾き，すなわち曲線 I_0 の点 $\boldsymbol{x}^0$ の傾きの絶対値に等しい。同様の操作により，I_0 曲線の任意の点 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$ で限界代替率 MRS($\boldsymbol{x}$) が得られる。無差別曲線が原点に対して凸であれば，2財の1財による代替が進むにつれて限界代替率が逓減していくことがわかる。したがって，仮定6の凸性の仮定は，限界代替率逓減の仮定ともいえるわけである。

2節付論

序数的効用関数 $u=u(x_1, x_2)$ において，u の水準を任意に定めることによって x_1x_2 平面に無数の無差別曲線が得られる。たとえば $u=u^0$ として描いたのが図2－2である。u を一定として効用関数 $u=u(x_1, x_2)$ を全微分すれば，

(2.1)　$$0=u_1dx_1+u_2dx_2$$

となる。ここで $u_1\equiv\partial u/\partial x_1$，$u_2\equiv\partial u/\partial x_2$ である。u_1, u_2 はそれぞれ1財と2財の限界効用とよばれる。仮定4より，u は x_1, x_2 に関して増加関数なので u_1, u_2 は共に正である。(2.1) より，

(2.2)　$$-\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{u_1}{u_2}$$

となる。すなわち限界代替率 MRS($\boldsymbol{x}$) は限界効用の比として求められる。限界代替率逓減の仮定は1財の増加が MRS($\boldsymbol{x}$) の減少をもたらすということであり，$d\mathrm{MRS}(\boldsymbol{x})/dx_1<0$ と数学的に表現できる。(2.2) より，

(2.3)　$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{MRS}(\boldsymbol{x})}{dx_1}&=-\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\\&=\frac{\left(u_{11}+u_{12}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}\right)u_2-\left(u_{21}+u_{22}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}\right)u_1}{u_2^2}\\&=\frac{1}{u_2^3}(u_{11}u_2^2-u_{12}u_1u_2-u_{21}u_1u_2+u_{22}u_1^2)<0\end{aligned}$$

となる。ここで$u_{ij} \equiv \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$,（$i, j=1, 2$），である。（2．3）の右辺の不等号が成立するのは，カッコの式が負となることである。行列式で表わせば，

$$
(2.4) \qquad \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} > 0
$$

となる。したがって仮定6の凸性の仮定は，限界代替率逓減の仮定であり，（2．4）の条件の成立を意味する仮定なのである。

3．所得の制約

家計が需要する財の需要計画には，物理的制約の他に経済的制約がある。家計は初期保有の財を供給して貨幣所得を得，その所得の範囲内で財の需要をしなければならない。これが経済的制約である。需要計画を構成する財の一部分は，所得を得るための負の需要，すなわち供給される財からなっている。しかしここでは複雑化を避けるために便宜上家計がすでに一定の貨幣所得を得ているとして，非負の財を需要する場合を述べることにする。

さて簡単化のために需要する財の種類を2種類1，2とし，家計にとっては所与のそれらの市場価格をp_1, p_2としよう。家計の所得をMとすれば，家計が任意の需要計画$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$を需要するとき，その支出額は$p_1x_1+p_2x_2$となり，

$$
(3.1) \qquad p_1x_1+p_2x_2 \leqq M
$$

の制約をみたさなければならない。（3．1）は所得制約式または予算制約式とよばれる。（3．1）の条件を描いたのが図3である。直線ABは，$p_1x_1+p_2x_2=M$を描いたもので予算線とよ

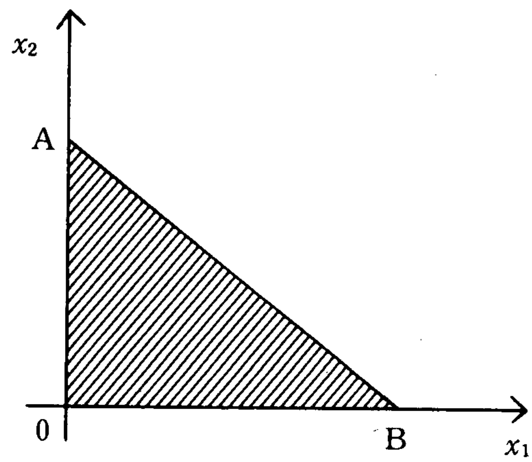

図3．

ばれる。（3．1）より点A，BはそれぞれM/p_2，M/p_1となる。これらは家計が所得Mで2財のみ，1財のみを購入したとき購入可能な2財と1財の最大量を表わしている。同様に予算線AB上の任意の点は，支出額が丁度所得Mと等しくなるすべての需要計画の集合である。もちろん予算線の下方の斜線部分の需要計画が所得Mで購入可能なことは明らかである。（3．1）より，予算線の傾きは$-p_1/p_2$，すなわち1財と2財と価格比にマイナスを付けたものである。

4．最適需要計画

家計は，合理的であれば，財の需要量を決めるとき序数的な意味での効用を最大にするように行動するであろう。以下で一定の所得を持つ家計が，財の価格が所与のもとで効用を最大にする最適需要計画をどのようにして決定するかを述べよう。

需要する財の量は正で[7]，2種類1，2とし，その価格をp_1，p_2としよう。家計の所得をMとすれば，所得制約式は$p_1x_1+p_2x_2 \leqq M$となる。したがって物理的，経済的制約から，家計が購入可能な需要計画は，図4の△OABの境界上またはその内部のものに限られる。図4のx_1x_2平面上には無差別曲線が無数に存在するが，仮に3個I_1，I_2，I_3を描いてみよう。I_1，とI_2の効用を得る需要計画の中には購入可能なものもあるが，I_3の効用を得る需要計画はすべて購入不可能である。し

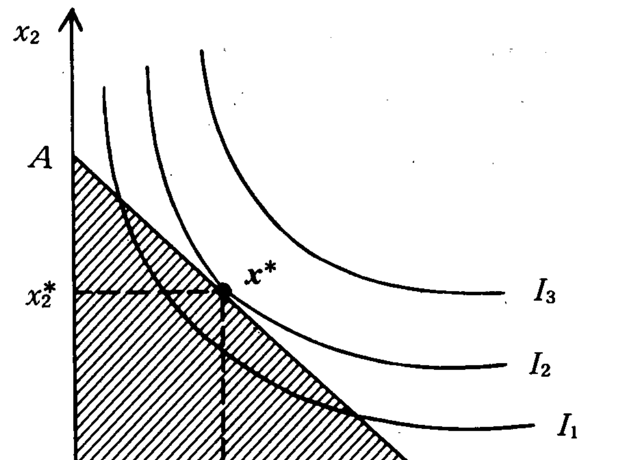

図4．

7）財の需要量に制約を課さない方がより一般的だが，技術的複雑化を避けるため，以下では正の需要量に限ることにする。

たがって，すでに述べたように無差別曲線の次数が高いほど高い効用指標を表わすから，図4から明らかなように家計にとって購入可能な需要計画の中で効用を最大にする最適需要計画は$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*, x_2^*)$である。

ところで最適需要計画$\boldsymbol{x}^*$はどのような条件をみたした点であろうか。まずそれは予算線上の点である。すなわち，

$$(4.1)\qquad p_1x_1^*+p_2x_2^*=M$$

さらに点$\boldsymbol{x}^*$で予算線と無差別曲線が接している，すなわち傾きが等しい。2，3節で述べたように，このことは1財と2財の限界代替率と価格比が等しいことを意味する。すなわち，

$$(4.2)\qquad \mathrm{MRS}(\boldsymbol{x}^*)=-\frac{dx_2^*}{dx_1^*}=\frac{p_1}{p_2}$$

（4．2）の条件は単に両曲線の傾きが等しいことを意味するだけなので，無差別曲線を原点に対して凹に描いても成立する条件である。その場合，点$\boldsymbol{x}^*$は所得Mを費いやして購入可能な任意の需要計画の中で，効用指標が最小になる需要計画であることは明らかである。したがって，効用が最大になるためには無差別曲線が原点に対し凸でなければならない。2節で述べたように，この条件は限界代替率逓減を意味する。すなわち，

$$(4.3)\qquad -\frac{d^2x_2^*}{dx_1^{*2}}<0$$

（4．1）と（4．2）が点$\boldsymbol{x}^*$で効用が最大になる必要条件であり，（4．3）が十分条件である。十分条件は仮定6より保証されているので，必要条件である（4．1）と（4．2）から，最適需要計画$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*, x_2^*)$を求めることができるのである。

4節付論

一定の所得Mをもつ家計が，所与の価格p_1，p_2のもとで，2種類の財1，

2の正の需要をする場合，最適需要計画の決定を形式的に述べれば次のようになる。すなわち，予算線$p_1x_1+p_2x_2=M$の制約のもとで，序数的効用関数$u=u(x_1, x_2)$を最大にする。制約条件つき関数の最大化問題をとくには，ラグランジュ乗数法を用いるのが便利である。ラグランジュ関数をLとすると，この問題は，

$$\max_{x_1,x_2,\lambda} L(x_1, x_2,\lambda)=u(x_1,x_2)+\lambda(M-p_1x_1-p_2x_2) \tag{4.4}$$

となる。λはラグランジュの未定乗数である。（4．4）の必要条件は，$dL=0$である。すなわち，

$$(u_1-\lambda p_1)dx_1+(u_2-\lambda p_2)dx_2+(M-p_1x_1-p_2x_2)d\lambda=0 \tag{4.5}$$

変数x_1，x_2，λの任意の変化分に対して（4．5）が成立するのは，

$$\begin{cases} M-p_1x_1-p_2x_2=0 \\ u_1-\lambda p_1=0 \\ u_2-\lambda p_2=0 \end{cases} \tag{4.6}$$

である。次に（4．4）の十分条件は，

$$p_1dx_1+p_2dx_2=0 \tag{4.7}$$

の条件のもとで，

$$d^2u<0 \tag{4.8}$$

となることである[8)]。（4．7）より$dx_1=-p_2/p_1\cdot dx_2$となり，（4．6）の条件を用いれば，$dx_1=-u_2/u_1\cdot dx_2$となる。これを（4．8）に代入して整理すれば，

$$(u_{11}u_2^2-u_{12}u_1u_2-u_{21}u_1u_2+u_{22}u_1^2)\frac{1}{u_1^2}dx_2^2<0 \tag{4.9}$$

8）（4．7）よりdx_1とdx_2は互いに従属関係になるので，（4．8）を求めるときは注意を要する。ただし，（4．7）のような線形の制約の場合は本稿のような展開が可能となる。Chiang, A. C. (1974)（大住・小田・高森・堀江訳，昭和54年，pp. 424－427参照）。

となる。（4．9）は，カッコの中の値が負になれば成立する。これを行列式で表わせば，

$$(4.10)\qquad \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ \mathrm{u}_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} > 0$$

となることである。（4．10）は，2節付論で述べたように限界代替率逓減の条件であり，これは仮定より保証されている。したがって，必要条件（4．6）の連立方程式体系をとくことによって，ラグランジュ関数Lを最大にする変数x_1^*，x_2^*，λ^*を求めることができる。

ところで一般に連立方程式体系において，未知数の数と方程式の数が等しいという条件は，解の存在を保証するものではない。ヤコービ行列式を用いて検証するのが普通である。これを（4．6）に適用して解の存在を確認してみよう。（4．6）を次のようなF関数と置くことにしよう。

$$(4.11)\qquad \begin{cases} F^1(\lambda,x_1,x_2,p_1,p_2,M) \equiv M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \\ F^2(\lambda,x_1,x_2,p_1,p_2,M) \equiv \qquad u_1 - \lambda p_1 = 0 \\ F^3(\lambda,x_1,x_2,p_1,p_2,M) \equiv \qquad u_2 - \lambda p_2 = 0 \end{cases}$$

（4．11）の$\boldsymbol{\lambda}$，x_1，x_2についてのヤコービ行列式を$|\boldsymbol{J}|$とすれば，

$$(4.12)\qquad |\boldsymbol{J}| \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial F^1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F^1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial F^2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F^2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F^3}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial F^3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F^3}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & u_{11} & u_{12} \\ -p_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

となる。$|\boldsymbol{J}| \neq 0$であれば（4．11）に解は存在する。（4．12）の右辺の行列式を（4．6）を用いて書きなおせば，

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$$

となる。これは十分条件（4.10）より正となる。したがって，陰関数の定理を用いれば，（4.6）の連立方程式体系の解λ^*，x_1^*，x_2^*はパラメーターp_1，p_2，Mの関数として求めることができる[9]。すなわち，

$$(4.13)\qquad \begin{aligned} \lambda^* &= \lambda^*(p_1,p_2,M) \\ x_1^* &= x_1^*(p_1,p_2,M) \\ x_2^* &= x_2^*(p_1,p_2,M) \end{aligned}$$

$x_1^*=x_1^*(p_1,p_2,M)$と$x_2^*=x_2^*(p_1,p_2,M)$は，１財と２財の個別需要関数とよばれる。

また，ラグランジュ乗数λ^*は次のような経済的意味をもつと解釈できる。必要条件（4.6）をx_1，x_2，λとMの関数と考えて，関数Φを定義する。

$$(4.14)\qquad \begin{aligned} \Phi^1(\lambda,x_1,x_2,M) &\equiv M-p_1x_1-p_2x_2=0 \\ \Phi^2(\lambda,x_1,x_2,M) &\equiv u_1-\lambda p_1=0 \\ \Phi^3(\lambda,x_1,x_2,M) &\equiv u_2-\lambda p_2=0 \end{aligned}$$

（4.14）のλ，x_1，x_2についてのヤコービ行列式$|\boldsymbol{J}|$は（4.12）と等しくなるので$|\boldsymbol{J}|\neq 0$である。したがって陰関数の定理より，λ，x_1，x_2，はMの関数となる。すなわち，

$$(4.15)\qquad \begin{aligned} \lambda &= \lambda(M) \\ x_1 &= x_1(M) \\ x_2 &= x_2(M) \end{aligned}$$

9）Intriligator, M. D.（1971），p. 153 参照。

（4.15）をラグランジュ関数（4．4）に代入すると，

$$(4.16)\qquad L(M)=u(x_1(M),x_2(M))+\lambda(M)(M-p_1x_1(M)-p_2x_2(M))$$

となる。（4.16）をMで微分すると，

$$(4.17)\qquad \frac{dL}{dM}=(u_1-\lambda p_1)\frac{dx_1}{dM}+(u_2-\lambda p_2)\frac{dx_2}{dM}+(M-p_1x_1-p_2x_2)\frac{d\lambda}{dM}+\lambda$$

となる。（4．6）の解であるx_1^*，x_2^*，λ^*の点では，（4.17）の右辺の3項はゼロとなり，またラグランジュ関数（4．4）は$L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)=u(x_1^*, x_2^*)$となるので，結局（4.17）は，

$$(4.18)\qquad \frac{dL(x_1^*,x_2^*,\lambda^*)}{dM}=\frac{du(x_1^*,x_2^*)}{dM}=\lambda^*$$

となる[10)]。したがって，λ^*は最適需要計画$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*, x_2^*)$での所得の変化に対する効用の変化率を表わしていることになる。これは，所得の限界効用または貨幣の限界効用とよばれる。

ところで，需要関数$x_1^*=x_1^*(p_1, p_2, M)$，$x_2^*=x_2^*(p_1, p_2. M)$は価格と所得についてのゼロ次同次関数である。すなわちαを任意の正数とすると，

$$(4.19)\qquad \begin{aligned} x_1^*(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha M)&=x_1^* \\ x_2^*(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha M)&=x_2^* \end{aligned}$$

となる。これは目的関数（4．4）を

$$\max L(x_1, x_2, \lambda)=u(x_1, x_2)+\lambda(\alpha M-\alpha p_1x_1-\alpha p_2x_2)$$

として，必要・十分条件を求めれば，（4．6）と（4.10）と等しくなることより簡単に証明することができる。すなわち，価格と所得を比例的に変化させても最適需要計画$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*, x_2^*)$は変らないのである。したがって，$\alpha\equiv1/p_1$とすれば（4.19）より需要関数は2変数の関数，

10) Intriligator, M. D. (1971)，p. 37 参照。

$$x_1^* = x_1^*(p_2/p_1,\ M/p_1)$$
$$x_2^* = x_2^*(p_2/p_1,\ M/p_1) \tag{4.20}$$

とすることができる。p_2/p_1は相対価格とよばれ，1財の価格を1としたときの2財の価格である。また1財1単位と交換できる2財の単位数を解して，1財と2財の交換比率ともいわれる。M/p_1は，貨幣所得を1財の単位数で表わしたもので実質所得とよばれる。

5．所得の変化と最適需要計画

財の価格が一定で所得のみ変化するとき，家計の最適需要計画にどのような効果を与えるだろうか。たとえば所得が増加すれば少なくとも以前よりより多くの財の購入が可能となり，仮定4より効用は増加するはずである。しかし個々の財の需要量についての効果は，どのようになるのだろうか。以下，このことについて述べよう。

価格は一定なので予算線の傾きは変らない。所得Mの変化は予算線の平行移動を意味するだけである。図5－1は，所得の変化に対応して3本の予算線を描いている。最適需要計画は予算線と無差別曲線の接点だから，図では各所得に対応して，$\boldsymbol{x}^{*\prime}$，$\boldsymbol{x}^{*}$，$\boldsymbol{x}^{*\prime\prime}$となる。図から明らかなように，この場合所得の増加は財1と財2の需要量を共にふやす効果を及ぼす。また高次の無差別曲線は，より高い効用指標を示すから，家計にとって所得の増加は効用の増加を意味することは明らかである。所得の変化を連続にすれば，任意の所得に対して最適な需要計画

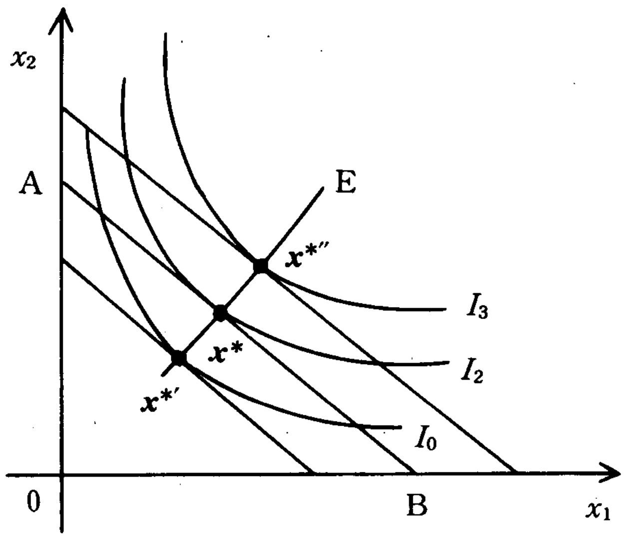

図5－1．

を示す連続な曲線Eが描ける。この曲線は所得・消費曲線または支出拡張線と呼ばれる。

ところで序数的効用関数の形状によって，無差別曲線は図5－2のようにも描ける。この場合，所得・消費曲線は右下りとなる。図から明らかなように，所得の増加は効用の増加を意味するが，1財の需要量を減少させる効果を与えている。所得の増加が需要量の減少をもたらすような財は，下級財とよばれる。これまで述べたことより，所得の変化が最適需要計画の個々の財の需要量を増やすのか減らすのか確定的にいえないことがわかった。

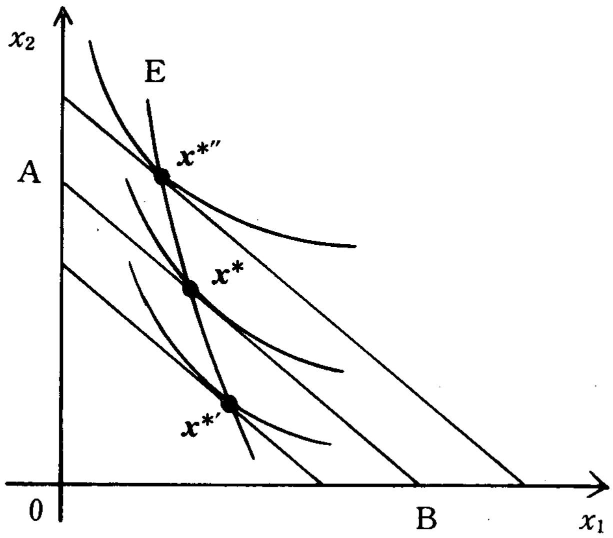

図5－2.

5節付論[11)]

所得の変化が最適需要計画に及ぼす効果を形式的に述べれば次のようになる。

最適需要計画$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*, x_2^*)$は，必要条件（4．6）をみたしている。すなわち，

$$
(5.1) \qquad
\begin{aligned}
&p_1x_1^*+p_2x_2^*=M\\
&-\lambda^*p_1+u_1=0\\
&-\lambda^*p_2+u_2=0
\end{aligned}
$$

11) Hicks, J. R. (1939)（安井・熊谷訳，1951，数学付録参照）。

（５．１）をMについて偏微分すれば，

$$p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial M}+p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial M}=1$$

$$(5.2)\qquad -p_1\frac{\partial \lambda^*}{\partial M}+u_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial M}+u_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial M}=0$$

$$-p_2\frac{\partial \lambda^*}{\partial M}+u_{21}\frac{\partial x_1^*}{\partial M}+u_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial M}=0$$

（５．２）をクラメールの公式を用いて解き，そして（５．１）より得られる$p_1=u_1/\lambda^*$, $p_2=u_2/\lambda^*$の関係を適用すれば，

$$(5.3)\qquad \frac{\partial x_1^*}{\partial M}=-\lambda^*\begin{vmatrix} u_1 & u_{12} \\ u_2 & u_{22} \end{vmatrix}\div\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}\equiv\frac{\lambda^* U_1}{U}$$

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial M}=\lambda^*\begin{vmatrix} u_1 & u_{11} \\ u_2 & u_{21} \end{vmatrix}\div\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}\equiv\frac{\lambda^* U_2}{U}$$

ここで，$U\equiv\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}$であり，$U_1$と$U_2$はそれぞれ$U$における$u_1$と$u_2$の余因数と定義している。（５．３）の右辺の行列式の分母は十分条件より正となるが，分子の行列式の符号は不明である。したがって，全体の符号は分からず，所得の変化が１財と２財の需要量を増加させるのか減少させるのか不確定である。（５．３）の符号が負となるならば，それらの財は下級財とよばれる。

６．価格の変化と最適需要計画

家計の所得は一定で財の価格が変化するとき，最適需要計画はどのように変化するだろうか。たとえば財の価格が下落すれば，一定の所得で少なくとも以前よりより多くの財の購入が可能になり，仮定４より家計にとって効用は増加するであろう。しかし個々の財の需要量に及ぼす効果は，どのように

なるであろうか。以下このことについて述べよう。

いま1財の価格のみが変化するとしよう。これは予算線の傾きの変化を意味する。たとえばp_1が下落すれば予算線の傾きの絶対値は下がり，所得Mが一定なので，Mによって購入可能な1財の最大量は増加する。そのことを図6では予算線ABからAB′への移動で示している。

最適需要計画は無差別曲線との接点だから，1財の価格p_1の下落以前と以後の最適需要計画は，それぞれ$\boldsymbol{x}^*$と$\boldsymbol{x}^{*\prime}$となる。図より明らかなように$\boldsymbol{x}^*$より$\boldsymbol{x}^{*\prime}$の方が家計にとって効用指標が高くなる。また図6の場合，p_1の下落は，1財の需要量の増加と2財の需要量の減少を示している。このような各財の需要量の増減は，どのような理由によって生じたのであろうか。

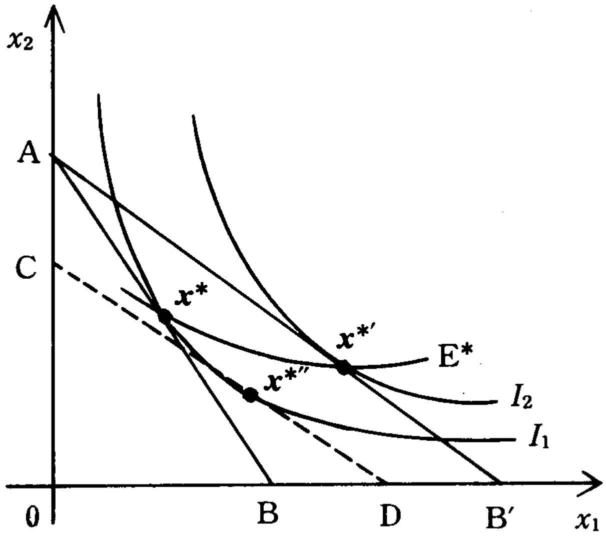

図6.

まず第1に，p_1の下落は予算線の傾きの絶対値，すなわち両財の価格比p_1/p_2の低下を意味した。この相対価格の変化が両財の需要量に及ぼす効果がある。この効果を図で示すためにAB′線と平行で無差別曲線I_1と$\boldsymbol{x}^{*\prime\prime}$で接する補助線CDを描がこう。そうすれば，$\boldsymbol{x}^{*\prime\prime}$は価格変化以前と等しい効用水準を保ちながら，$p_1$の下落後の相対価格のみが変化したときの効果を考慮して達成される最適需要計画である。図から明らかなように，$\boldsymbol{x}^{*\prime\prime}$では2財の需要量が減少し1財の需要量が増加している。このことは，2財の価格p_2は不変ながら，家計が1財の価格p_1の下落によって，相対的に高くなった2財を1財で代替すると説明できるかもしれない。この1財と2財の需要量の増減の関係は，財が2種類の図のような場合，仮定6より常に成立する。しかし，より一般的な財が3種類以上になると，この関係はかならずしもいえない。

たとえば財が3種類1財，2財，3財の場合を考えてみよう。1財の価格の下落は1財の需要量の増加をもたらすが，効用を一定に保つために相対価格の高くなった2財と3財の需要量を共に減少させる必要がないからである。たとえば2財の需要量も1財同様増加させ，それによってもたらされる効用の増加を相殺するに足るだけの3財の需要量の減少があればよいからである。ある財の価格の下落が他の財の需要量を減少させるような関係にあるとき，それらの財は代替財とよばれ，逆に他の財の需要量を増加させるような関係にあるとき，それらの財は補完財とよばれる。このように相対価格の変化によってもたらされる財の需要量に対する効果は，代替効果とよばれる。図6の場合の代替効果は，最適需要計画の$\boldsymbol{x}^*$から$\boldsymbol{x}^{*\prime\prime}$の移動によって表わされている。

第2の理由は，p_1の下落は一定の貨幣所得のもとでより多くの財の購入を可能にすることである。すなわち，1財で表わした実質所得の増加を意味する。5節で述べたように，所得の増加は予算線の東北方向への平行移動である。図6では，予算線AB′と平行な補助線CDによってこの関係を表わしている。p_1の下落によって，以前と等しい効用を維持するにはCD線によって示された所得で十分だが，実際の所得はそれより大きなAB′の予算線で示されたものである。

その差額分が家計にとって所得が増加したことと同じ効果を持つ。この効果を図6では，最適需要計画の$\boldsymbol{x}^{*\prime\prime}$から$\boldsymbol{x}^{*\prime}$への移動によって表わしている。この図では，1財と2財の需要量を共に増加させる効果を示している。しかし5節で述べたように，財が下級財であれば所得の増加は需要量の減少をもたらすのだから，この効果が財の需要量を増加させるのか減少させるのか確定的なことは言えない。この実質所得の変化が財の需要量に及ぼす効果を，所得効果とよぶ。

かくして，1財の価格の変化は代替効果と所得効果を生じ，この2つの効果が合わさって新しい価格状況に応じた新しい最適需要計画が決定されるので

ある。価格p_1の変化を連続にすれば，最適需要計画も連続に変化する。図6では，それをE^*線によって表わしている。この曲線は価格･消費曲線とよばれ，形式的には4節付論で求めた（4．13）のp_2とMを一定としたときの需要関数に相当するものである。

さて，上で述べたことより結果としてどのようなことが言えるだろうか。

1財の価格が下落すると，その財が下級財でなければ代替効果と所得効果は共に需要量を増加するように働き，またその財が下級財であったとしても需要量の減少をもたらす所得効果より代替効果の方が大きければ，全体として依然としてその財の需要量の増加をもたらす。その財が下級財であって，しかも所得効果が代替効果より大きくなるときにはじめて需要量が減少すると言えるだろう。しかし最後のケースの可能性は，その財が下級財であって，しかも家計の需要計画の中にあって所得に占める割合が非常に大きく，したがって価格の下落が大きな実質所得の増加をもたらすような財に限られるであろう。このような財はギッフェン財とよばれる。

6節付論[12)]

財の価格の変化が最適需要計画に及ぼす効果を形式的に述べれば以下のようになる。

最適需要計画$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*, x_2^*)$は必要条件（4．6）をみたしている。それらの式を$p_1$について偏微分すれば，

$$
\begin{aligned}
p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}&=-x_1^* \\
-p_1\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1}+u_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}+u_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}&=\lambda^* \qquad (6.1)\\
-p_2\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1}+u_{21}\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}+u_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}&=0
\end{aligned}
$$

12）Hicks, J. R.（1939）（安井・熊谷訳，1951，数学付録参照）。

となる。(6.1) をクラメールの公式を用いて解き，そして必要条件より得られる$p_1=u_1/\lambda^*$，$p_2=u_2/\lambda^*$の関係を適用すれば，

$$(6.2)\qquad \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}=-x_1^*\frac{\lambda^* U_1}{U}+\frac{\lambda^* U_{11}}{U}=-x_1^*\frac{\partial x_1^*}{\partial M}+\frac{\lambda^* U_{11}}{U}$$

となる。ここで，U，U_1は5節付論で定義したものと同様であり，U_{11}はUにおけるu_{11}の余因数である。また (6.2) の最後の等号は，(5.3) より得られた。同様に，

$$(6.3)\qquad \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}=-x_1^*\frac{\partial x_2^*}{\partial M}+\frac{\lambda^* U_{12}}{U}$$

が得られる。ただし，U_{12}はUにおけるu_{12}の余因数である。また，もしも2財の価格p_2が変化するのであれば同様の計算方法を用いることによって，(6.2) は，

$$(6.2)'\qquad \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}=-x_2^*\frac{\partial x_1^*}{\partial M}+\frac{\lambda^* U_{21}}{U}$$

(6.3) は，

$$(6.3)'\qquad \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}=-x_2^*\frac{\partial x_2^*}{\partial M}+\frac{\lambda^* U_{22}}{U}$$

となる。したがって一般的に書けば，

$$(6.4)\qquad \frac{\partial x_s^*}{\partial p_r}=-x_r^*\frac{\partial x_s^*}{\partial M}+\frac{\lambda^* U_{rs}}{U},\ (r,s=1,2),$$

となる。これは価格理論の基本方程式またはスルーツキィ方程式とよばれている。価格の変化の効果を分析する場合，どの財の価格を選んでも理論上変りがないので，ここでは1財の価格p_1が変化する場合を述べよう。

さて，価格p_1が変化すれば (6.2)，(6.3) より1財と2財の需要量に及ぼす効果が2つの部分に分けられることがわかる。右辺の第1項が所得効果であり第2項が代替効果である。

まず第2項が代替効果になることを説明しよう。代替効果は，価格変化に

よる実質所得の変化分を除いた，相対価格の変化のみに起因する需要量の変化であった。すなわち予算線の傾きの変化のみに対応して最適需要計画を決定することであった。その場合効用は価格変化以前の水準と等しいので，序数的効用関数より，

$$du = u_1 dx_1^* + u_2 dx_2^* = 0$$

となる。必要条件より $u_1 = \lambda^* p_1$，$u_2 = \lambda^* p_2$ であるから，これは，

（6．4）　$\lambda^*(p_1 dx_1^* + p_2 dx_2^*) = 0$

となる。λ^* は必要条件より正であるから，（6．4）が成立するのは，

（6．5）　$p_1 dx_1^* + p_2 dx_2^* = 0$

の条件をみたす場合である。ところで価格が変化したときの所得の変化は，

$$dM = p_1 dx_1^* + p_2 dx_2^* + x_1^* dp_1 + x_2^* dp_2$$

となる。もし所得が効用を価格変化以前と等しい一定の水準に保つように変化するならば，（6．5）よりこれは，

$$dM = x_1^* dp_1 + x_2^* dp_2$$

となる。これは効用を一定にする所得の補償的変化とよばれる。したがって，本節のように p_1 のみが変化したときの所得の補償的変化は，

（6．6）　$\dfrac{\partial M}{\partial p_1} = x_1^*$

となる。（4．6）の第1式を所得 M も変化するものとして p_1 で偏微分すれば，（6．1）の第1式は，

（6．7）　$p_1 \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1} + p_2 \dfrac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = \dfrac{\partial M}{\partial p_1} - x_1^* = 0$

となる。（6．7）の右辺がゼロになるのは，（6．6）を適用したからである。したがって効用を一定にするような所得の補償的変化を考慮して（6．1）の連立方程式を解けば，（6．2）は，

（6．8）　$\left.\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right|_{u=\mathrm{const}} \equiv \dfrac{\lambda^* U_{11}}{U}$

（6．3）は，

$$(6.9)\qquad \left.\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right|_{u=\mathrm{const}} \equiv \frac{\lambda^* U_{12}}{U}$$

となる。$\left.\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right|_{u=\mathrm{const}}$，$\left.\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right|_{u=\mathrm{const}}$ は，効用を一定にするような所得の補償的変化を考慮したときのp_1の変化にもとづく1財と2財の需要量の変化と定義している。したがって，（6．8）と（6．9）は代替効果の形式的表現にほかならない。（6．8）の符号を調べてみよう。Uは十分条件より，λ^*は必要条件より正であった。$U_{11}=-u_2^2<0$となるから，したがって（6．8）は負となる。すなわち，もしも1財の価格p_1が下落するならば1財の需要量は確実に増加する。後に述べるように，これは財が3種類以上の場合にも成立する性質である。次に（6．9）において，$U_{12}=u_1u_2$となり仮定4よりu_1，u_2は正なので$U_{12}>0$となる。したがって（6．9）の全体の符号は正となる。すなわち，1財の価格が下落すれば2財の需要量は減少する。この結果は2種類の財の場合には確実に成立する。すなわち，1財と2財はかならず代替財になるのである。しかしより一般的な3種類以上の財を取り扱う場合補完財になることもありうることに注意しよう。ところで，（6．3）と（6．2）′の右辺第2項を調べてみると，U_{12}とU_{21}は等しくなるので，結局，$\left.\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right|_{u=\mathrm{const}}=\left.\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}\right|_{u=\mathrm{const}}$ となる。すなわち，1財の価格変化による2財の需要量に及ぼす代替効果と，2財の価格変化による1財の需要量に及ぼす代替効果とは等しくなるのである。これは，代替効果の対称性とよばれ，財が3種類以上の一般的な場合にも妥当する性質である。

つぎに，（6．2）と（6．3）の右辺第1項が所得効果になることを説明しよう。第1項は上で述べたようにp_1の変化による所得の変化分x_1^*と，所得の変化による財の需要量の変化率$\partial x_i^*/\partial M$，（$i=1$，2）となっているから，結局$p_1$の変化による所得の変化にもとづく財の需要量の変化分を示している。したがって，この項が所得効果の形式的表現であることは明らかである。この所得効果の符号は，$\partial x_i^*/\partial M$の符号によって変化するので確定できない。す

でに述べたように，i財が下級財であるならば，$\partial x_i^*/\partial M<0$ であった。

さて，以上で述べたことより（6．2）と（6．3）の符号について，すなわち1財の価格変化の財の需要量に及ぼす効果について，なにを言うことができるだろうか。

（6．2）では，もし1財が下級財でないならば右辺の第一項（所得効果）も第2項(代替効果)も共に負となり全体は負となる。したがって，価格p_1の下落は1財の需要量を増加させる。1財が下級財であれば第1項は正となるが，しかしそれでも第2項の負の値より絶対値として小さいならば，全体は依然として負となる。（6．2）が正になるのは，すなわち価格の下落が1財の需要量を減少させるのは，第1項の正の値が第2項の負の値より絶対値で大きくなる場合に限られるが，それは1財が下級財でしかも価格の下落による所得の増加分x_1^*が非常に大きくなる場合にのみ可能であろう。これは，1財がギッフェン財の場合である。（6．3）については，2財が下級財でなければ第1項が負，第2項が正であるので全体の符号は確定できない。すなわち1財の価格の下落は，2財の需要量を所得効果によって増加させ代替効果によって減少させるので，全体としての動きは両効果の大小関係によって決まる。しかし2財が下級財であれば両効果は正になるので，p_1の下落は確実に2財の需要量を減少させるであろう。なお（6．3）のこの結果は，取り扱う財が2種類の場合に限られることに注意しよう。なぜなら，（6．3）の第2項は3種類以上の財の場合補完財のケースもあり，符号を確定できないからである。ある財の価格が下落したとき，所得効果と代替効果の両効果の結果として，他の財の需要量が減少するならば，それらの財は粗代替財，需要量が増加するならば粗補完財とよばれる。

最後に，財をn種類に拡張して，上で述べた代替効果の性質が一般的な場合に成立することを簡単に述べよう。

4節付論より家計の目的は，

$$(6.10)\quad \max L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\lambda(M-p_1x_1-p_2x_2-\cdots-p_nx_n)$$

となる。(6.10) の必要条件は,

$$(6.11)\quad \begin{aligned} &p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n=M\\ &-\lambda p_r+u_r=0,\ (r=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

十分条件は，行列式

$$(6.12)\quad \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2\\ u_1 & u_{11} & u_{12}\\ u_2 & u_{21} & u_{22}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3\\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ u_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23}\\ u_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33}\end{vmatrix},\cdots,\ \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2\cdots u_n\\ u_1 & u_{11} & u_{12}\cdots u_{1n}\\ u_2 & u_{21} & u_{22}\cdots u_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ u_n & u_{n1} & u_{n2}\cdots u_{nn}\end{vmatrix}$$

が交互に正，負になることである。

任意の財rの価格p_rの変化は，任意の財sの最適需要量x_s^*にどのような効果を及ぼすだろうか。これを調べるには，上で述べた2種類の財の場合と同様，一般的な場合のスルーツキィ方程式を求めればよい。これは，簡単な計算によって,

$$(6.13)\quad \frac{\partial x_s^*}{\partial p_r}=-x_r^*\frac{\partial x_s^*}{\partial M}+\frac{\lambda^* U_{rs}}{U},\ (r,s=1,2,\cdots,n)$$

となる。(6.13) は (6.4) をn種類の財の場合に拡張したものである。ここでのUは (6.12) の最後の行列式であり，U_{rs}はUのu_{rs}の余因数である。2財の場合同様，(6.13) の右辺第1項が所得効果，第2項が代替効果を表わしている。

さて (6.13) の代替効果,

$$\left.\frac{\partial x_s^*}{\partial p_r}\right|_{u=\mathrm{const}}\equiv\frac{\lambda^* U_{rs}}{U}$$

において，sは任意の財であるからそれをrとすれば，

(6.14) $$\left.\frac{\partial x_r^*}{\partial p_r}\right|_{u=\text{const}} \equiv \frac{\lambda^* U_{rr}}{U}$$

となる。必要条件よりλ^*は正，十分条件よりUとU_{rr}の符号は反対になるので，（6.14）は負となる。すなわち，任意の財rの価格の下落はr財の需要量を増加させるのである。

つぎに（6.13）より，

$$\left.\frac{\partial x_r^*}{\partial p_s}\right|_{u=\text{const}} \equiv \frac{\lambda^* U_{sr}}{U}$$

が成立する。余因数U_{sr}はsとrについて対称になっているからU_{rs}と等しく，したがって，

(6.15) $$\left.\frac{\partial x_s^*}{\partial p_r}\right|_{u=\text{const}} \equiv \left.\frac{\partial x_r^*}{\partial p_s}\right|_{u=\text{const}}$$

となる。すなわち代替効果の対称性は一般的場合にも成立する性質である。

さらに次の式が成立する。

(6.16) $$0U_r + u_1U_{1r} + u_2U_{2r} + \cdots + u_nU_{nr} = 0$$

なぜならば，（6.16）は行列式Uを第1列の要素にr列の余因数を掛けて展開したものであり，これは行列式の性質よりゼロとなるからである。（6.16）の両辺を$U \neq 0$で割り，必要条件より得られる$u_r = \lambda^* p_r$，$(r=1,2,\cdots,n)$の関係式を代入すると，（6.16）は，$\sum_{s=1}^{n} p_s \lambda^* U_{sr}/U = 0$となる。すなわち，

(6.17) $$\sum_{s \neq r} p_s \frac{\lambda^* U_{sr}}{U} = -p_r \frac{\lambda^* U_{rr}}{U} > 0$$

（6.17）の右辺が正になるのは（6.14）からである。（6.17）は，任意の財rと他のすべての財sについて，代替効果$\lambda^* U_{sr}/U$がすべて正かまたはいくつかが負であっても全体として正になれば良いことを意味している。したがって，2種類の財を取り扱う場合と異なり一般的な場合には，任意の財rと他の財sの中で少なくとも1つの財と代替財の関係にならなければならない

が，残りの財と補完財の関係になることができるのである。

第二章　交換経済の一般均衡

財の生産を含まない家計のみからなる単純な経済を考えよう。このような経済として，各家計が初期に保有している財（初期保有）を，お互に交換して自己の序数的効用関数からみて効用指標が最大になるように財を再配分する物々交換のような経済を想定できるかもしれない。ここでは，前章の論旨を一貫するために家計が初期保有を市場に供給して貨幣所得を得，その所得の範囲内で効用を最大にするように財を需要するという形式で述べることにする。

問題は，各家計が独立に決定する各財の最適需要量が全体としてその財の供給量と等しくなるかどうかである。もし等しくならなければ，たとえば需要量が供給量を越えたりすれば取引きは成立せず経済が機能しないことになってしまう。

ところで，完全競争の市場のもとでは，すべての財の需要と供給を一致させるような価格体系が，これは第一章4節付論で述べた相対価格または交換比率の体系だが，存在することを証明できる。すべての財の需給が等しくなる状態を市場均衡または一般均衡と言い，そのときの価格は均衡価格とよばれる。以下で，財が2種類1，2家計の数が2個I，IIからなる完全競争市場の一般均衡を述べよう。この場合，エッジワースのボックス・ダイアグラムとよばれる図を用いて説明することができる[13]。

家計Iの初期保有を$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{I}}=(\bar{x}_{1\mathrm{I}}, \bar{x}_{2\mathrm{I}})$，家計IIの初期保有を$\bar{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{II}}=(\bar{x}_{1\mathrm{II}}, \bar{x}_{2\mathrm{II}})$とする。したがって市場に供給される1財の供給量は，$\bar{x}_{1\mathrm{I}}+\bar{x}_{1\mathrm{II}}\equiv\bar{X}_1$，2財のそれは，$\bar{x}_{2\mathrm{I}}+\bar{x}_{2\mathrm{II}}\equiv\bar{X}_2$となる。また各家計にとっては所与である財1，2の価格を，

13）Henderson, J. M. and R. E. Quandt（1971）（小宮・兼光訳，pp. 200－202 参照）。

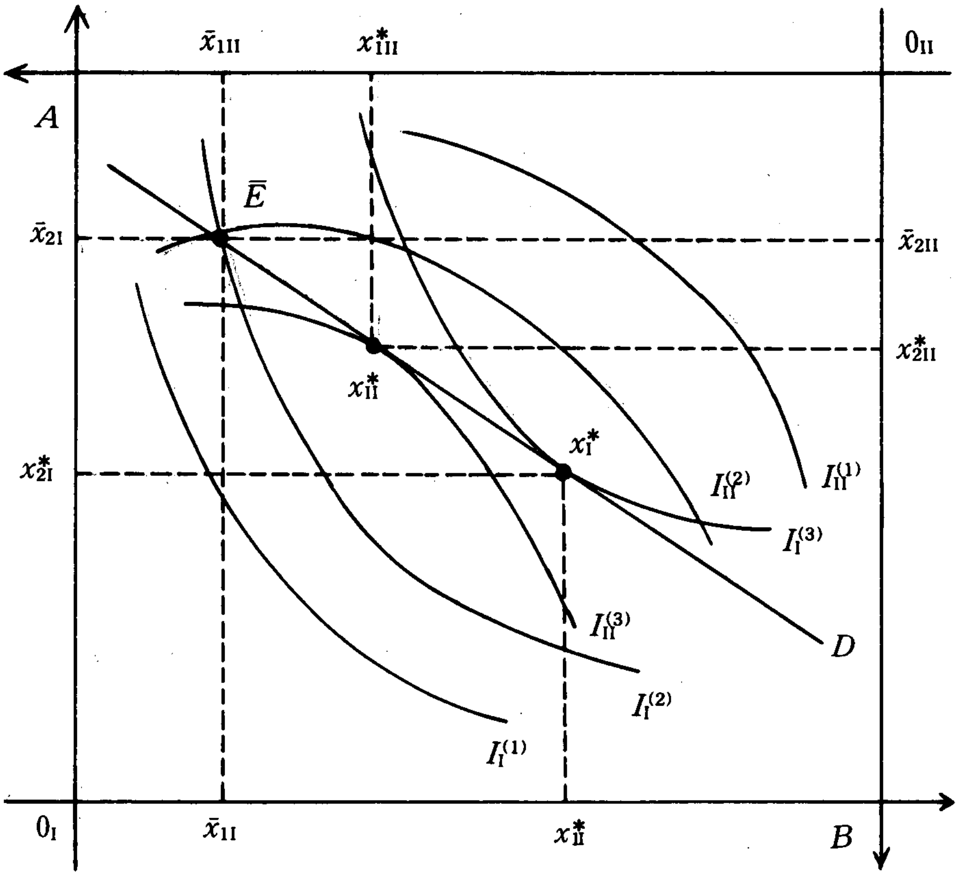

図 1.

それぞれp_1, p_2としよう。図 1 は，家計 I の需要計画$\boldsymbol{x}_{\mathrm{I}}=(x_{1\mathrm{I}}, x_{2\mathrm{I}})$を原点$\mathrm{O_I}$から，家計IIの需要計画$\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}=(x_{1\mathrm{II}}, x_{2\mathrm{II}})$を原点$\mathrm{O_{II}}$からとっている。それぞれの家計にとって，横軸に 1 財の縦軸に 2 財の数量を計っている。またボックスの横の長さ$\mathrm{O_IB}=\mathrm{O_{II}A}$を 1 財の供給量$\bar{X}_1$に，縦の高さ$\mathrm{O_IA}=\mathrm{O_{II}B}$を 2 財の供給量$\bar{X}_2$になるようにとっている。さて，点$\bar{E}$を家計 I，IIにとっての初期保有の需要計画としよう。家計 I の予算線は，

（1）　$p_1x_{1\mathrm{I}}+p_2x_{2\mathrm{I}}=p_1\bar{x}_{1\mathrm{I}}+p_2\bar{x}_{2\mathrm{I}}$

家計IIの予算線は，

（2）　$p_1x_{1\mathrm{II}}+p_2x_{2\mathrm{II}}=p_1\bar{x}_{1\mathrm{II}}+p_2\bar{x}_{2\mathrm{II}}$

となる。各家計の予算線（1），（2）は初期保有の点で成立するから，図 1 の$\bar{E}$を通るD線のように描ける。予算線Dの傾きは，家計 I，IIにとって等しく$-p_1/p_2$である。図 1 に家計 I，IIの無差別曲線を描けば（図ではそれぞ

れ3本の無差別曲線を描いている)，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{I}}^{*}$ が家計Iの，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}^{*}$ が家計IIの，この相対価格のときの最適需要計画になる。なぜならば，それぞれの点は予算線と最も効用指標の高い無差別曲線と接している点であり，このことは第一章4節で述べたように最適需要計画の必要条件であった。また十分条件の無差別曲線がそれぞれの原点 O_{I}，O_{II} に対して凸になるのは，仮定より成立している。

ところで，家計I，IIが上のような最適需要計画であれば市場で取引は成立しない。なぜならば，家計Iの1財の需要量は $x_{1\mathrm{I}}^{*}$，家計IIのそれは $x_{1\mathrm{II}}^{*}$ だから，$\bar{X}_1-(x_{1\mathrm{I}}^{*}+x_{1\mathrm{II}}^{*})<0$ となり，1財は超過需要になる。また，家計Iの2財の需要量は $x_{2\mathrm{I}}^{*}$，家計IIのそれは $x_{2\mathrm{II}}^{*}$ だから，$\bar{X}_2-(x_{2\mathrm{I}}^{*}+x_{2\mathrm{II}}^{*})>0$ となり，2財は超過供給となる。したがって，このときの相対価格は一般均衡をもたらす均衡価格ではない。ここで相対価格をさまざまに変えてみよう。これは図1では予算線Dを $\bar{E}$ 点を中心に回転させることを意味する。第一章6節で述べたように，価格の変化を連続的にとれば任意の相対価格に対応して最適需要計画が定まり，その点の軌跡が価格・消費曲線だった。この軌跡はまたオファー・カーブともよばれる。したがって，図1において相対価格を変えることによって，すなわち $\bar{E}$ 点を通る傾きの異なる予算線を無数に描くことによって，家計Iにとって $\bar{E}$ 点と $\boldsymbol{x}_{\mathrm{I}}^{*}$ を通るオファー・カーブが，家計IIにとって $\bar{E}$ 点と $\boldsymbol{x}_{\mathrm{II}}^{*}$ を通るオファー・カーブが描けるはずである。それらを描いたのが図2の E_{I} と E_{II} である。E_{I} が家計Iの，E_{II} が家計IIのオファー・カーブである。かくして，2つの曲線 E_{I}，E_{II} が交差する E° 点が，双方の家計にとって所得制約のもとで効用が最大になり，しかも各財の需要量と供給量が等しくなる一般均衡の需要計画となる。このとき E° 点を通る予算線(図2ではD′線）の傾きの絶対値が均衡価格である。また，図の錯綜を避けるため描いてないが，無差別曲線が原点に対して凸の仮定より，E° 点で双方の家計にとって初期保有のときより効用指標の高い無差別曲線が接していることは明らかである。

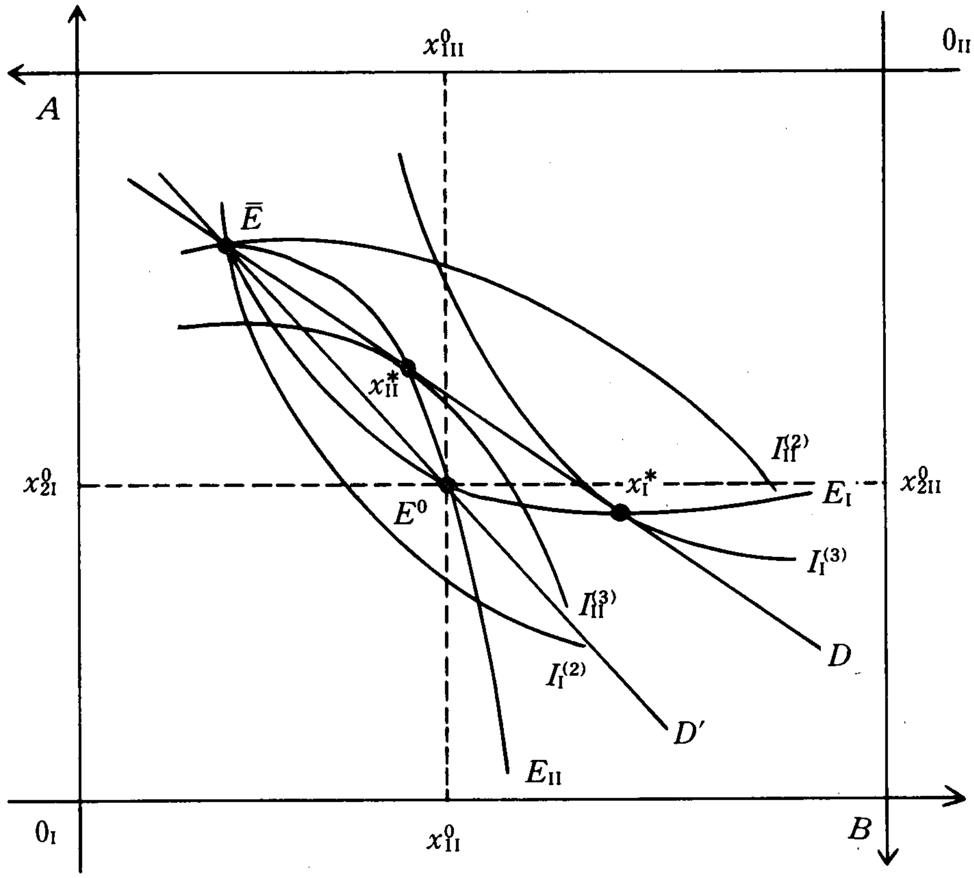

図2.

第二章付論

2種類の財1，2を初期保有として持つ2個の家計Ⅰ，Ⅱからなる交換経済の一般均衡を形式的に述べれば次のようになる。

家計ⅠとⅡの効用指標を表わす序数的効用関数をそれぞれ$u^{\mathrm{I}}=u^{\mathrm{I}}(x_{1\mathrm{I}}, x_{2\mathrm{I}})$，$u^{\mathrm{II}}=u^{\mathrm{II}}(x_{1\mathrm{II}}, x_{2\mathrm{II}})$としよう。各家計の予算線は（1）と（2）であるから，したがって家計Ⅰの目的は，

$$(3)\qquad \max L(x_{1\mathrm{I}}, x_{2\mathrm{I}}, \lambda)=u^{\mathrm{I}}(x_{1\mathrm{I}}, x_{2\mathrm{I}})+\lambda(p_1\bar{x}_{1\mathrm{I}}+p_2\bar{x}_{2\mathrm{I}}-p_1x_{1\mathrm{I}}-p_2x_{2\mathrm{I}})$$

である。（3）の必要条件は，

$$
(4)\qquad
\begin{cases}
u_1^{\mathrm{I}}-\lambda p_1=0 \\
u_2^{\mathrm{I}}-\lambda p_2=0 \\
p_1x_{1\mathrm{I}}+p_2x_{2\mathrm{I}}-p_1\bar{x}_{1\mathrm{I}}-p_2\bar{x}_{2\mathrm{I}}=0
\end{cases}
$$

である。ここで$u_i^{\mathrm{I}}\equiv\partial u^{\mathrm{I}}/\partial x_{i\mathrm{I}}$, $(i=1,2)$である。また十分条件は,

$$
\begin{vmatrix}
0 & u_1^{\mathrm{I}} & u_2^{\mathrm{I}} \\
u_1^{\mathrm{I}} & u_{11}^{\mathrm{I}} & u_{12}^{\mathrm{I}} \\
u_2^{\mathrm{I}} & u_{21}^{\mathrm{I}} & u_{22}^{\mathrm{I}}
\end{vmatrix}>0
$$

である。ここで$u_{ij}^{\mathrm{I}}\equiv\partial^2u^{\mathrm{I}}/\partial x_{i\mathrm{I}}\partial x_{j\mathrm{I}}$,（$i$, $j=1$, 2）である。十分条件の成立は仮定より保証されているので，$\bar{x}_{1\mathrm{I}}$, $\bar{x}_{2\mathrm{I}}$ を定数として第一章4節付論でのように（4）を解けば,

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
x_{1\mathrm{I}}^*&=x_{1\mathrm{I}}^*(p_1, p_2)\\
x_{2\mathrm{I}}^*&=x_{2\mathrm{I}}^*(p_1, p_2)
\end{aligned}
$$

と求めることができる。これらは，家計Iの財1と2の需要関数である。

同様に，家計IIの需要関数は,

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
x_{1\mathrm{II}}^*&=x_{1\mathrm{II}}^*(p_1, p_2)\\
x_{2\mathrm{II}}^*&=x_{2\mathrm{II}}^*(p_1, p_2)
\end{aligned}
$$

となる。（5），（6）は第一章4節付論で述べたと同様にすれば，価格についてのゼロ次同次関数であることがわかる。したがって，たとえば各価格を$1/p_1$倍すれば，結局（5），（6）は，相対価格p_2/p_1 1個を未知数とする関数となる。

市場の一般均衡は，各財の需要量と供給量が等しくなることであるから,

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
x_{1\mathrm{I}}^*+x_{1\mathrm{II}}^*&=\bar{X}_1\\
x_{2\mathrm{I}}^*+x_{2\mathrm{II}}^*&=\bar{X}_2
\end{aligned}
$$

となる。（7）の各方程式は，（5），（6）のゼロ次同次性より，価格についてのゼロ次同次の関数となり，ここでは相対価格p_2/p_1のみの関数である。し

たがって，（7）の連立方程式は未知数1個に対して方程式が2個となり過剰決定となる。

ところで，各家計の最適需要計画は任意に与えられた価格に対して，必要条件より，

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
p_1x^*_{1\mathrm{I}}+p_2x^*_{2\mathrm{I}}&=p_1\bar{x}_{1\mathrm{I}}+p_2\bar{x}_{2\mathrm{I}}\\
p_1x^*_{1\mathrm{II}}+p_2x^*_{2\mathrm{II}}&=p_1\bar{x}_{1\mathrm{II}}+p_2\bar{x}_{2\mathrm{II}}
\end{aligned}
$$

となる。（8）より，

$$
(9)\qquad p_1(x^*_{1\mathrm{I}}+x^*_{1\mathrm{II}}-\bar{X}_1)+p_2(x^*_{2\mathrm{I}}+x^*_{2\mathrm{II}}-\bar{X}_2)=0
$$

が成立する。すなわち，市場全体では収入と支出が均等するという条件である。これは，ワルラスの法則とよばれる。（9）は（7）とは独立に任意の価格に対して成立する恒等式である。（9）より，財1，2いづれかの市場が均衡すれば，他の財の市場も均衡していることがわかる。したがって，（7）の連立方程式は独立な方程式は1個のみで，他の方程式は従属的である。かくして，（7）のいづれかの方程式をとくことによって，市場の一般均衡をもたらす均衡価格（相対価格）を求めることができるのである。

参考文献

Archibald, G. C. and R. G. Lipsey (1976) *An Introduction to Mathematical Economics*（作間逸雄・秋山太郎・戸田学訳『入門経済数学 I，II』，多賀出版，1982年）

Chiang, A. C. (1974) *Fundamental Methods of Mathematical Economics*（大住栄治・小田正雄・高森寛・堀江義訳『現代経済学の数学基礎上，下』，マグロウヒル好学社，昭和54年）

Debreu, G. (1959) *Theory of Value*（丸山徹訳『価値の理論』，東洋経済新報社，昭和52年）

Henderson, J. M. and R. E. Quandt (1971) *Microeconomic Theory*（小宮隆太郎・兼光秀郎『現代経済学』，創文社，昭和48年）

Hicks, J. R. (1939) *Value and Capital*（安井琢磨・熊谷尚夫訳『価値と資本 I，II』，岩波書店，1951年）

Intriligator, M. D. (1971) *Mathematical Optimization and Economic Theory,* Prentice-Hall.

Malinvand., E. (1977) *Leçons de Théorie Microécomique* （林敏彦訳『ミクロ経済理論講義』，創文社，昭和56年）

Varian, H. R. (1978) *Microeconomic Analysis* （佐藤隆三・三野和雄訳『ミクロ経済分析』，勁草書房，1986年）

Walras, L. (1926) *Eléments d'Economie Politique ou Théorie de la Richesse* （久武雅夫訳『純粋経済要論』，岩波書店，1983年）

伊藤元重・西村和雄編（1989）『応用ミクロ経済学』東京大学出版会

今井賢一・宇沢弘文・小宮隆太郎・根岸隆・村上泰亮（1971）『価格理論Ⅰ』岩波書店

奥野正寛・鈴村興太郎（1985）『ミクロ経済学Ⅰ』岩波書店

二階堂副包（1960）『現代経済学の数学的方法』岩波書店

福岡正夫（昭和61年）『ゼミナール経済学入門』日本経済新聞社